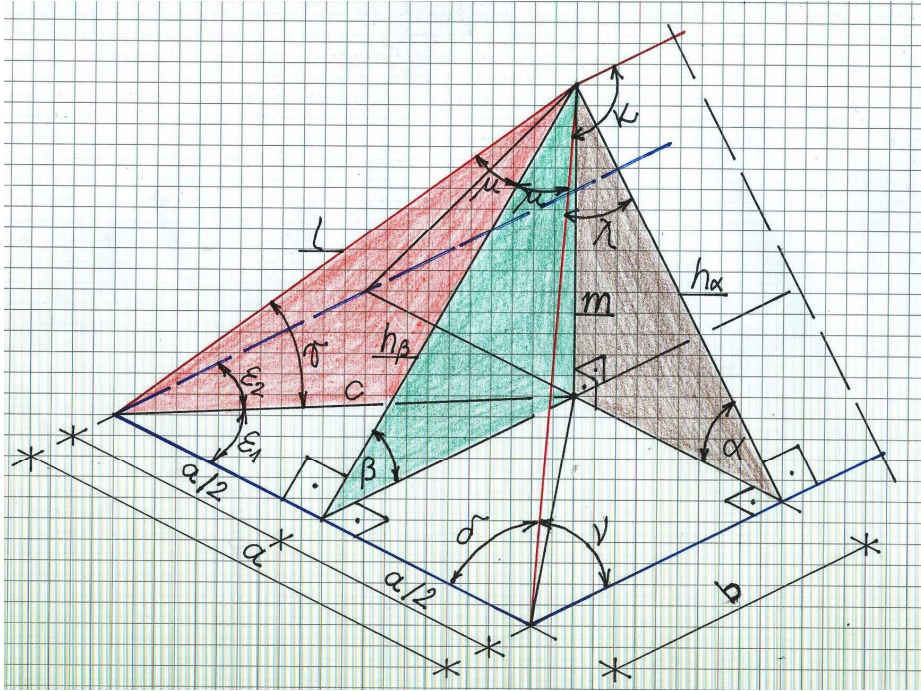


A kontytető geometriájához

Már többször szóba kerültek az alábbiak, így ezek egyfajta összefoglalásnak is tekinthetők, a szimmetrikus kontytető jellemző vonalszakaszainak valódi hosszára és közbezárt szögeire nézve. Most tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Ennek segítségével írjuk fel a legfontosabb összefüggéseket. Soroljuk:

$$\frac{m}{a/2} = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow m = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha ; \quad (1)$$

$$\frac{m}{b} = \operatorname{tg} \beta \rightarrow b = \frac{m}{\operatorname{tg} \beta} ; \quad (2)$$

most (1) és (2) - vel:

$$b = \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} ; \quad (3)$$

$$\frac{a/2}{h_{\alpha}} = \cos \alpha \rightarrow h_{\alpha} = \frac{a}{2 \cdot \cos \alpha} ; \quad (4)$$

$$\frac{b}{h_{\beta}} = \cos \beta \rightarrow h_{\beta} = \frac{b}{\cos \beta} ; \quad (5)$$

majd (3) és (5) - tel:

$$h_{\beta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{h_{\beta} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta} ;}} \quad (6)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} , \quad (7)$$

majd (3) és (7) - tel:

$$c = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2\right]} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{c = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2} ;}} \quad (8)$$

ezután:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{c} , \quad (9)$$

majd (1) és (8) - cal:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2}} ,$$

innen:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2} ,$$

vagy

$$\operatorname{ctg}\gamma = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta} , \quad (10)$$

innen:

$$\gamma = \operatorname{arccctg}\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}\right) ; \quad (11)$$

ezután:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{h_{\beta}}{a/2} , \quad (12)$$

majd (6) és (12) - vel:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} , \quad (13)$$

innen:

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}\right) ; \quad (14)$$

ezután:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{b}{a/2} , \quad (15)$$

majd (3) és (15) - tel:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} , \quad (16)$$

innen:

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right) ; \quad (17)$$

továbbá az 1. ábra szerint:

$$\varepsilon_2 = 90^\circ - \varepsilon_1 ; \quad (18)$$

ezután:

$$l = \sqrt{c^2 + m^2} , \quad (19)$$

majd (1), (8) és (19) - cel:

$$l = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2\right] + \left(\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\alpha\right]} =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\alpha} ,$$

tehát:

$$l = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2} ; \quad (20)$$

ismét az 1. ábra alapján:

$$\underline{\underline{\mu = 90^\circ - \delta}} ; \quad (21)$$

$$\operatorname{tg}v = \frac{h_\alpha}{b} , \quad (22)$$

majd (3), (4) és (22) - vel:

$$\operatorname{tg}v = \frac{\frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}}{\frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg}\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg}v = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} , \quad (23)$$

innen:

$$\underline{\underline{v = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}\right)}} ; \quad (24)$$

megint az 1. ábrával:

$$\underline{\underline{\lambda = 90^\circ - v}} , \quad (25)$$

$$\underline{\underline{\kappa = 90^\circ + \lambda}} . \quad (26)$$

A fentiek alapján már sok fontos kérdést meg tudunk válaszolni; néhány példa:

- ~ az élszaru elméleti hossza: l ;
- ~ az élszaru hajlása: γ ;
- ~ az élszaru a talpszelemenekkel δ és ν szöget zár be;
- ~ az élszaru a taréjjal κ szöget zár be;
- ~ a két élszaru egymással 2μ szöget zár be, stb.

Megjegyzések:

M1. Minthogy minden keresett mennyiséget az (a, α, β) adatokkal fejeztünk ki, ezért a feladat kiírása az alábbi is lehet:

Adott: $(a, \alpha, \beta, \varepsilon \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 90^\circ)$.

Keresett: $(\gamma, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, \mu, \nu, \kappa; h_\alpha, h_\beta, l)$.

M2. A (10) -ből kapható

$$\operatorname{ctg}^2 \gamma = \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta \quad (27)$$

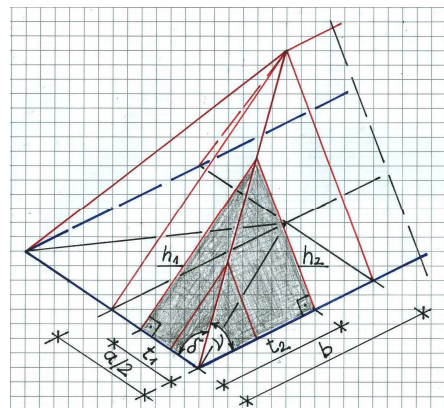
összefüggés a *Pitagorász - tételre* emlékeztet. Ez nem a véletlen műve; ugyanis az 1. ábráról leolvasható

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} &= m \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \\ b &= m \cdot \operatorname{ctg} \beta, \\ c &= m \cdot \operatorname{ctg} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

összefüggéseket (7) négyzetébe helyettesítve és egyszerűsítve kapjuk (27) -et. Ezek szerint úgy is fogalmazhatunk, hogy ezzel a mondott szögek kotangenseire vonatkozó Pitagorász - tétel állt elő, a szimmetrikus kontytető esetére.

M3. A kontytetőknél fellépő nagyon fontos szerkezeti elemek, a csonkaszarufák elméleti hosszának meghatározása most már az alábbiak szerint is történhet – 3. ábra.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{h_1}{t_1} \rightarrow h_1 = t_1 \cdot \operatorname{tg} \delta, \\ \operatorname{tg} \nu &= \frac{h_2}{t_2} \rightarrow h_2 = t_2 \cdot \operatorname{tg} \nu, \\ 0 < t_1 &< \frac{a}{2}, \quad 0 < t_2 < b. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$



3. ábra

Most (13) és (29 / 1) - gyel:

$$h_1 = t_1 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta} ; \quad (30 / 1)$$

majd (23) és (29 / 2) - vel:

$$h_2 = t_2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} . \quad (30 / 2)$$

Megfigyelhető a két utóbbi képlet egyfajta szimmetriája.

M3. Egy nagyon fontos speciális eset az, amikor a tetőhajlások megegyeznek, vagyis $\alpha = \beta$. (*)

Ekkor több képlet lényegesen egyszerűbb alakot vesz fel:

$$\left. \begin{aligned} b^* &= \frac{a}{2} ; \quad h_{\alpha}^* = h_{\beta}^* = \frac{a}{2 \cdot \cos \alpha} ; \quad c^* = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} ; \\ \gamma^* &= \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \right) ; \quad \delta^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) ; \\ \varepsilon_1^* &= \varepsilon_2^* = 45^\circ ; \quad l^* = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} ; \\ \mu^* &= 90^\circ - \delta^* ; \quad \nu^* = \delta^* ; \\ \lambda^* &= 90^\circ - \nu^* = \mu^* ; \quad \kappa^* = 90^\circ + \lambda^* . \end{aligned} \right\} \quad (S)$$

M4. Fontos, hogy a vizsgált kontytető derékszögű négyszög alaprajzú: $\varepsilon = 90^\circ$. Ettől eltérő esetekben a képletek lényegesen mások lehetnek.

M5. Vegyük észre, hogy a képletek összeállítása – a feladat elvi megoldása – során úgy jártunk el, hogy minden lépésben csak adott, vagy már korábban meghatározott mennyiségeket használtunk fel a továbbhaladáshoz. Ehhez kell egy *megoldási terv*. Ebben is segíthet ez a dolgozat. Hiszen – úgy tűnik – továbbra is hiányzik / hiánycikk a magyar tetőgeometriai szakirodalom.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnök tanár

Szódliget, 2014. február 9.